ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

SESSION 1988

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES *Durée : 4 heures*

NOTA : Les deux problèmes sont indépendants.
Les parties A et B du premier problème peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PROBLEME N° 1

A – On considère une suite (a_n) de nombres réels telle que : $a_0 = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

1) a) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

x étant réel, de somme A(x) à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

Comparer le rayon de cette série au nombre 1.

b) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 + \ldots + a_n) x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Trouver le rayon de convergence de cette série.

Exprimer, à l'intérieur de l'intervalle de convergence, la somme R(x) de cette série en fonction de x et de A(x) .

2) On définit la suite (b_n) de la façon suivante :

$b_0 = 0$; $b_1 = a_1$ et , $\forall n \geq 2$, $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$.

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$, x étant réel .

a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.

b) Trouver la nature de la série numérique de terme général b_n et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

c) Exprimer, à l'intérieur d'un intervalle à préciser, la somme B(x) de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ en fonction de A(x).

3) On suppose que $a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N}^*$, p donné et que, $\forall q \geq p+1$, $a_q = 0$; A(x) est donc un polynôme de degré p . On désigne par $s_1 = 1, s_2, \ldots, s_p$ les racines réelles ou complexes de l'équation $A(x) = 1$.

a) Montrer que ces racines ont toutes un module au moins égal à 1 .

b) Montrer que, si $a_1 \neq 0$, la seule racine de l'équation $A(x) = 1$ ayant pour module 1 est $s_1 = 1$.

Tournez la page S. V. P.

c) On suppose les racines s_1 , s_2 ,... , s_p toutes simples. Démontrer l'égalité

$$b_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{A'(s_k)\,(s_k)^{n+1}} \quad .$$

En déduire, si $a_1 \neq 0$, l'existence d'une limite, quand $n \to +\infty$, pour b_n .

Exprimer cette limite en fonction de A'(1) .

Dans cette question, A'(x) désigne la dérivée de A(x) par rapport à x.

B – $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$; α est fixé ; $t \in \mathbb{R}^*_+$. On définit la fonction f de la variable réelle x par :

$$x \longmapsto f(x) = \int_0^1 t^{\alpha}\, \mathrm{Arctg}(xt)\, dt \ .$$

1) a) Donner le développement en série entière de x, autour de l'origine, de la fonction $x \longmapsto t^{\alpha}\,\mathrm{Arctg}(xt)$, t étant fixé. Donner le rayon de convergence de la série obtenue en fonction de t .

b) Etudier l'uniforme convergence de cette série sur [0,1] quand $|x| < 1$.

2) a) En déduire une série entière (Σ), de somme S(x) , telle que, pour tout x tel que $|x| < 1$, $f(x) = S(x)$. Préciser le rayon de convergence de (Σ).

b) Etudier l'absolue convergence de (Σ) pour $x = \pm 1$ et son uniforme convergence pour $|x| \leq 1$.

3) Montrer que f est continue à gauche au point $x = 1$, en majorant

$|\mathrm{Arctg}(xt) - \mathrm{Arctg}\, t|$.

En déduire f(1) et f(−1) respectivement en fonction de S(1) et S(−1) . L'égalité $f(x) = S(x)$ est-elle vraie sur [−1,+1] ?

Nota : Dans cette partie, aucun résultat énoncé sans justification précise, complète mais simple ne sera admis .

PROBLEME N° 2

$n \in \mathbb{N}^*$; le plan affine euclidien est rapporté à la base orthonormée directe $O\ \vec{i}\ \vec{j}$; les axes Ox et Oy portent respectivement les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

1) On considère la courbe (C_n) d'équation polaire $\rho = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$, $\theta \neq 0$; $\rho(0) = n$; l'axe polaire étant Ox .

a) Dans quel intervalle faut-il faire varier θ pour obtenir la courbe (C_n) tout entière ?

Indiquer les symétries de (C_n) et choisir un intervalle de variation de θ qui permette, en utilisant les symétries éventuelles, d'obtenir toute la courbe (C_n) .

Tournez la page S.V.P.

Montrer que la courbe (C_n) est tangente à deux droites fixes qu'on précisera.

Donner, en fonction de n, les angles polaires des points de contact.

Combien la courbe (C_n) contient-elle de boucles ? (Dans toute cette étude on distinguera les deux cas : $n=2p+1$ et $n=2p$, $n\in\mathbb{N}^*$) .

Que sont les courbes (C_1) et (C_2) ?

b) Construire avec précision les courbes (C_3) et (C_4) .

c) Montrer que les points de la courbe (C_n) en lesquels la normale à (C_n) passe par O sont situés sur une conique dont on donnera l'équation cartésienne dans le repère O x y et la nature.

2) a) Soit $J_n(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin nt}{\sin t}\, dt$, dont on montrera qu'elle converge en O.

Trouver une relation de récurrence entre $J_n(\theta)$ et $J_{n-2}(\theta)$. En déduire les valeurs des intégrales

$$I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2pt}{\sin t}\, dt \text{ et } I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}\, dt$$

Trouver la limite de I_{2p} quand p tend vers $+\infty$.

b) Soit $H_n(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\, dt$, dont on montrera qu'elle converge en O .

Exprimer $H_n(\theta)$ en fonction de θ , de $J_{2n+1}(\theta)$ et de $J_{2n-1}(\theta)$.

c) M étant le point de la courbe (C_n) d'angle polaire θ, calculer l'aire de la portion de plan balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ quand θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Quelle est la limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$?

d) Calculer en fonction de n l'aire de la portion de plan balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ quand θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{n}$.

On pourra d'abord donner le résultat en fonction de $J_{2n-1}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

puis on explicitera à l'aide d'une somme.

L'aire a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

On fera intervenir l'intégrale convergente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \ell$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail